Решения задач

1. Ответ: $y = 2x^2 - 3$.

Легко видеть, что как эллипс, заданный уравнением из условия задачи, так и координаты точек касания, симметричны относительно оси ординат. Отсюда напрашивается предположение, что искомая парабола имеет ось ординат в качестве своей оси симметрии. В рамках такого допущения, задача решается очень просто. А именно, парабола задаётся уравнением вида $y = kx^2 + b$, и ввиду того, что она проходит через точку $(1, -1)$, имеем $k + b = -1$. Вторую точку при этом можно не рассматривать ввиду соображений симметрии.

Далее, полагая $\Phi(x, y) = 4x^2 + y^2 - 5$, находим координаты вектора нормали к эллипсу в точке (x, y). Он имеет координаты $(\partial\Phi/\partial x, \partial\Phi/\partial y) = (8x, 2y)$, и в точке касания $(x, y) = (1, -1)$ он коллинеарен вектору $(4, -1)$, откуда вытекает, что касательный вектор в той же точке коллинеарен $(1, 4)$, то есть угловой коэффициент касательной равен 4. Сравним его с угловым коэффициентом касательной к параболе, равным $(kx^2 + b)' = 2kx$. При $x = 1$ это приводит к уравнению $2k = 4$, то есть $k = 2$, и потому $b = -1 - k = -3$. Парабола тем самым задаётся уравнением $y = 2x^2 - 3$.

Однако здесь мы в ходе рассуждений неявно опирались на недоказанный факт. Вообще говоря, ниоткуда не следовало, что наша парабола должна быть симметрична относительно оси ординат. Из соображений симметрии напрямую вытекает лишь то, что если какая-то парабола удовлетворяет условиям задачи, то и симметричная ей также удовлетворяет, но в принципе возможен такой вариант, что решений у задачи имеется более одного.

Поэтому требуется некоторое дополнительное рассуждение. Рассмотрим кривую второго порядка общего вида, заданную уравнением

$$\Psi(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Если она проходит через точки с координатами $(-1, -1)$ и $(1, -1)$, то выполнены равенства $A + 2B + C - D - E + F = 0$ и $A - 2B + C + D - E + F = 0$, откуда $D = 2B$, $F = -A - C + E$.

Далее, вектор нормали к кривой второго порядка (которую мы предполагаем параболой) равен $(\partial\Psi/\partial x, \partial\Psi/\partial y) = (2Ax + 2By + D, 2Bx + 2Cy + E)$. Используя факт касания с эллипсом, и полагая $(x, y) = (1, -1)$, имеем коллинеарные векторы $(4, -1)$ и $(2A - 2B + D, 2B - 2C + E)$, что приводит к уравнению $2A - 2B + D + 4(2B - 2C + E) = 0$. Ввиду $D = 2B$, оно упрощается до $A + 4B - 4C + 2E = 0$.

В точке $(x, y) = (-1, -1)$ вектор нормали к эллипсу имеет координаты $(4, 1)$, и он коллинеарен вектору $(2A + 2B - D, 2B + 2C - E)$, что приводит к уравнению $2A + 2B - D = 4(2B + 2C - E)$, упрощаемому до $A = 4B + 4C - 2E$.

Сравнивая полученные нами соотношения $A = 4B + 4C - 2E$ и $A + 4B - 4C + 2E = 0$, приходим к выводу, что $B = 0$ и $A = 4C - 2E$. Следовательно, $D = 0$, $F = 3E - 5C$.

Поскольку $B = 0$, и наша кривая является параболой, числа A и C не могут быть одновременно отличны от нуля. Рассмотрим два случая.

1) $A = 0$. При этом $E = 2C$, $F = C$. Уравнение упрощается до $y^2 + 2y + 1 = 0$, что даёт пару совпадающих прямых, и этот вариант отпадает.

2) $C = 0$. Здесь $A = -2E$, $F = 3E$, что приводит к уравнению $-2x^2 + y + 3 = 0$ или $y = 2x^2 - 3$.

Это и есть искомое уравнение параболы. Задача имеет в точности одно решение.

2. Ответ: да, верно.

Пусть $U = (0,1)^2 \setminus S$, где S счётно. Рассмотрим произвольные точки A, B из U. Их можно соединить в открытом квадрате $(0,1)^2$ континуальным числом ломаных линий, которые попарно не пересекаются за исключением точек A, B. Например, можно взять ломаные вида ACB, где C – точка открытого квадрата, лежащая на серединном перпендикуляре к AB. Ясно, что хотя бы одна из этих ломаных не будет содержать точек счётного множества S. Следовательно, она соединяет A и B в U. Что влечёт линейную связность, а потому и связность множества U.

3. Ответ: 1.

Всего имеется в точности $n!$ биекций I_n на себя, и каждая такая биекция задаётся перестановкой. Выпишем все такие перестановки в виде матрицы из $n!$ строк и n столбцов, и против каждой строки напишем число неподвижных точек биекции, задаваемой написанной перестановкой. Очевидно, что сумма всех чисел $\nu(f)$ по всем биекциям f равна количеству символов, стоящих в столбце с номером, равным этому символу. Для каждого i от 1 до n, имеется ровно $(n-1)!$ перестановок, в которых i занимает i-е место. Поэтому общее количество символов, стоящих на своих местах, составляет $n \cdot (n-1)! = n!$. Осталось разделить эту величину на общее количество биекций. В результате получится 1. Это и есть искомое среднее значение.

4. Пусть $x \geq 0$. Тогда $y'' + y = x$, то есть $(y-x)'' + (y-x) = 0$, откуда $y = x + a\cos x + b\sin x$. При $x \leq 0$, соответственно, получаем $y'' + y = -x$, то есть $(y+x)'' + (y+x) = 0$, а потому $y = -x + c\cos x + d\sin x$.

В точке 0 значения обоих выражений для y должны совпадать, что означает справедливость равенства $a = c$. Далее, находя производные на каждом из промежутков, мы получаем равенства $y' = 1 - a\sin x + b\cos x$ при $x \geq 0$, и $y' = -1 - a\sin x + d\cos x$. Сравнение значений в нуле даёт $1 + b = -1 + d$, то есть $d = b + 2$.

Таким образом, получилась функция

$$y(x) = \begin{cases} x + a\cos x + b\sin x, & x \geq 0 \\ -x + a\cos x + (b+2)\sin x, & x \leq 0 \end{cases}$$

удовлетворяющая дифференциальному уравнению. (Совпадение второй производной в нуле справа и слева получается автоматически.)

Осталось учесть дополнительные условия. Из $\pi/2 = y(\pi) = \pi - a$ получаем $a = \pi/2$. Поскольку при $x \leq 0$ выполнено равенство $y'(x) = -1 - a\sin x + (b+2)\cos x$, заключаем, что $0 = y'(-\pi) = -1 - (b+2)$, то есть $b = -3$. Окончательно имеем:

$$y(x) = \begin{cases} x + \frac{\pi}{2}\cos x - 3\sin x, & x \ge 0 \\ -x + \frac{\pi}{2}\cos x - \sin x, & x \le 0 \end{cases}.$$

5. Из соображений симметрии можно считать, что $a \ge b \ge c$. Доказываемое неравество можно переписать в виде

$$a^{3a}b^{3b}c^{3c} \ge a^{a+b+c}b^{a+b+c}c^{a+b+c},$$

а также в виде

$$a^{2a-b-c}b^{2b-a-c}c^{2c-a-b} \ge 1.$$

Последнее вытекает из того, что

$$a^{2a-b-c}b^{2b-a-c}c^{2c-a-b} = \left(\frac{a}{b}\right)^{2a-b-c} b^{a+b-2c}c^{2c-a-b} = \left(\frac{a}{b}\right)^{2a-b-c}\left(\frac{b}{c}\right)^{a+b-2c} \ge 1,$$

ввиду $a/b \ge 1$, $b/c \ge 1$, $2a-b-c \ge 0$, $a+b-2c \ge 0$.

6. Полагая $g = ab^{-1}$ в равенстве $g^3 = e$, получаем $ab^{-1}ab^{-1}ab^{-1} = e$. Отсюда $ab^{-1}a = (b^{-1}ab^{-1})^{-1} = ba^{-1}b$. Но $a^{-1} = a^2$, $b^{-1} = b^2$, поэтому $ab \cdot ba = ab^{-1}a = ba^{-1}b = ba \cdot ab$, что означает перестановочность элементов ab и ba.

7. Пусть $n = p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_r^{k_r}$ — каноническое разложение числа n, где $p_1 < p_2 < \cdots < p_r$ — простые числа, и $k_1, k_2, \ldots, k_r \ge 1$. Для вычисления функции $\varphi(n)$ имеется известная формула

$$\varphi(n) = n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_r}\right),$$

вывод которой может быть осуществлён очень многими способами. Приведём один из них, основываясь на теоретико-вероятностных соображениях.

Прежде всего, пусть мы выбираем случайное число от 1 до n при равновероятном выборе. Тогда вероятность того, что выбранное число будет взаимно просто с n, равно $\varphi(n)/n$. С другой стороны, взаимная простота какого-то числа с n в точности означает, что это число не делится ни на одно из простых чисел списка p_1, p_2, …, p_r.

Обозначим через A_i $(1 \le i \le r)$ событие, состоящее в том, что случайно выбранное число делится на p_i. Очевидно, что вероятность этого события равна $1/p_i$, а вероятность его дополнения $\bar{A}_i$ равна $1 - 1/p_i$. Временно предположим, что рассматриваемые нами события вида $\bar{A}_i$ $(1 \le i \le r)$ независимы в совокупности. Тогда интересующая нас вероятность $\varphi(n)/n$ равна $P(\bar{A}_1\cdots\bar{A}_r) = P(\bar{A}_1)\cdots P(\bar{A}_r)$, что равно произведению величин вида $1 - 1/p_i$ по всем i от 1 до r, и это даёт требуемую формулу.

Незаисимость же событий следует вот из каких соображений. Прежде всего, событие $A_1 \cdots A_r$ состоит в том, что случайно выбранное число делится на каждое из простых чисел списка $p_1, \ldots, p_r$, а это равносильно делимости числа на их произведение. Вероятность такого события есть не что иное как $1/p_1 \ldots p_r$, то есть она равна произведению вероятностей $P(A_i) = 1/p_i$ по всем i. Это означает, что справедливо равенство $P(A_1 \cdots A_r) = P(A_1) \cdots P(A_r)$, то есть события $A_1, \ldots, A_r$ независимы в совокупности. В точности то же соображение показывает, что если мы возьмём какую-то часть из этих же событий, то и они окажутся независимыми в совокупности.

Теперь, зная совокупную независимость некоторых событий $A, B, C, \ldots$, а также совокупную независимость событий $B, C, \ldots$, мы чисто арифметически приходим к равенству

$$P(\bar{A}BC\cdots) = P(BC\cdots) - P(ABC\cdots) = P(B)B(C)\cdots - P(A)P(B)P(C)\cdots,$$

то есть

$$P(\bar{A}BC\cdots) = (1 - P(A))P(B)P(C)\cdots = P(\bar{A})P(B)P(C)\cdots,$$

а это означает совокупную независимость событий $\bar{A}, B, C, \ldots$. Тем самым мы можем шаг за шагом заменить каждое из событий вида A_i на его дополнение, обосновывая этим нужный нам факт о том, что события вида $\bar{A}_i$ $(1 \le i \le r)$ независимы в совокупности.

Теперь займёмся вопросом о делителях числа n. Все они имеют вид $n = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_r^{m_r}$, где $0 \le m_i \le k_i$ при всех i от 1 до r. Поэтому сумма всех таких делителей получается при раскрытии скобок в выражении

$$\left(1 + p_1 + p_1^2 + \cdots + p_1^{k_1}\right) \cdots \left(1 + p_r + p_r^2 + \cdots + p_1^{k_r}\right),$$

откуда

$$\sigma(n) = n \cdot \left(1 + p_1^{-1} + p_1^{-2} + \cdots + p_1^{-k_1}\right) \cdots \left(1 + p_r^{-1} + p_r^{-2} + \cdots + p_1^{-k_r}\right),$$

что приводится к виду

$$\sigma(n) = n \cdot \frac{\left(1 - \frac{1}{p_1^{k_1+1}}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_r^{k_r+1}}\right)}{\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right)}.$$

В итоге оказывается, что $\varphi(n)\sigma(n) = cn^2$, где

$$c = \left(1 - \frac{1}{p_1^{k_1+1}}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_r^{k_r+1}}\right).$$

Очевидно, что $c < 1$. Далее,

$$c \ge \left(1 - \frac{1}{p_1^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_r^2}\right) \ge \prod_{t=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{t^2}\right) > \frac{1}{2}$$

ввиду того, что

$$\prod_{t=2}^{n}\left(1-\frac{1}{t^2}\right)=\frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3\cdot 3}\cdots\frac{(n-1)(n+1)}{n\cdot n}=\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}>\frac{1}{2}.$$

8. Ответ: $I_+/I = 1/3$.

Представим интеграл I в виде суммы четырёх слагаемых по каждому из квадрантов. Заметим, что ввиду чётности функции v, при одновременной смене знака у каждой из переменных, интеграл не изменится. Поэтому I равен удвоенной сумме интегралов по двум квадрантам, для которых $x \geq 0$. Интеграл по квадранту $x \geq 0$, $y \geq 0$ равен I_+, а интегрирование по квадранту $x \geq 0$, $y \leq 0$ даёт интеграл

$$I_- = \int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{0} v(x)v(x-y)v(y)\,dx\,dy = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} v(x)v(x+y)v(y)\,dx\,dy.$$

Выше было установлено, что $I = 2(I_+ + I_-)$. Сравним интегралы I_+ и I_-. Для этого разобьём I_+, рассматриваемый как двойной интеграл, на сумму двух слагаемых. В первом из них мы интегрируем функцию $v(x)v(x-y)v(y)$ по множеству $x \geq y \geq 0$, а во втором — ту же функцию по множеству $y \geq x \geq 0$. Тогда первое слагаемое, после замены $t = x - y \geq 0$, превращается в интеграл

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} v(y+t)v(t)v(y)\,dt\,dy = I_-,$$

а второе слагаемое равно первому в силу соображений симметрии. Из этого следует, что $I_+ = 2I_-$. Поэтому $I = 2(I_+ + I_-) = 6I_-$. Следовательно, $I_+/I = 1/3$.