Студенческая олимпиада по математике, 2009 год

1. Парабола касается эллипса $4x^2 + y^2 = 5$ в точках $(-1, -1)$ и $(1, -1)$. Найти её уравнение.

2. Из открытого единичного квадрата удалено счётное множество точек. Верно ли, что полученное в результате множество всегда является связным?

3. Пусть f — взаимно однозначное отображение множества $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ на себя, случайно выбираемое с равной вероятностью из всех таких отображений. Через $\nu(f)$ обозначим число неподвижных точек отображения f, то есть таких i от 1 до n, для которых $f(i) = i$. Найти математическое ожидание случайной величины ν, то есть среднее значение числа неподвижных точек биективного отображения.

4. Решить дифференциальное уравнение $y'' + y = |x|$, где функция $y = y(x)$ задана на всей числовой прямой и удовлетворяет условиям $y(\pi) = \pi/2$ и $y'(-\pi) = 0$.

5. Пусть a, b, c — положительные действительные числа. Доказать неравенство

$$a^a b^b c^c \geq (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}.$$

6. Дана группа $(G, \cdot)$, в которой для любого элемента $g \in G$ выполняется равенство $g^3 = e$. Доказать, что элементы вида ab и ba в этой группе всегда перестановочны.

7. Пусть n — натуральное число. Через $\varphi(n)$ обозначим количество натуральных чисел отрезка $[1, n]$, которые взаимно просты с n (функция Эйлера), и пусть $\sigma(n)$ есть сумма всех натуральных делителей числа n. Доказать, что для всех $n > 1$ справедливо двойное неравенство

$$\frac{n^2}{2} < \varphi(n)\sigma(n) < n^2.$$

8. Дана чётная непрерывная функция $v(x)$, принимающая неотрицательные значения. Известно, что несобственный интеграл

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} v(x)v(x-y)v(y)\, dx\, dy$$

сходится. Положим

$$I_+ = \int\limits_{0}^{\infty} \int\limits_{0}^{\infty} v(x)v(x-y)v(y)\, dx\, dy.$$

Найти отношение I_+/I.