# РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Элемент $x \in G$ порядка 2 удовлетворяет условиям $x = x^{-1}$, $x \neq e$. Если таких элементов в группе нет, то все её неединичные элементы можно разбить на пары взаимно обратных друг другу. При этом порядок группы $G$ не может быть чётным.

2. При любом допустимом $x$ имеем

$$f(x+2a) = \frac{\sqrt{3} + f(x+a)}{1 - \sqrt{3}f(x+a)} = \frac{\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}+f(x)}{1-\sqrt{3}f(x)}}{1 - \sqrt{3}\frac{\sqrt{3}+f(x)}{1-\sqrt{3}f(x)}} = \frac{f(x) - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}f(x)}\,.$$

Следовательно,

$$f(x+3a) = \frac{f(x+a) - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}f(x+a)} = \frac{\frac{\sqrt{3}+f(x)}{1-\sqrt{3}f(x)} - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}\frac{\sqrt{3}+f(x)}{1-\sqrt{3}f(x)}} = \frac{4f(x)}{4} = f(x)\,.$$

3. Пусть $x^2 + 3y^2 = 1$. Легко видеть, что при $y = 1/2$ имеем $x = \pm 1/2$. Пусть $y \neq 1/2$. Положим

$$t = \frac{x - 1/2}{y - 1/2}\,.$$

Ясно, что если $x, y \in \mathbb{Q}$, то и $t \in \mathbb{Q}$. Полагая $u = y - 1/2 \neq 0$, имеем $y = u + 1/2$, $x = tu + 1/2$. При подстановке в уравнение получаем $(tu+1/2)^2 + 3(u+1/2)^2 = 1$, что после упрощений и сокращения на $u \neq 0$ даёт $(t^2+3)u + t + 3 = 0$. Отсюда выражаем $u$ и находим

$$(x, y) = \left(-\frac{t^2 + 6t - 3}{2(t^2+3)}, \frac{t^2 - 2t - 3}{2(t^2+3)}\right).$$

Условие $u \neq 0$ означает, что $t \neq -3$. Ясно, что при $t = -3$ формула для $(x, y)$ даёт уже учтённое решение $(1/2, 1/2)$. Можно также отметить, что и другое учтённое выше решение $(-1/2, 1/2)$ получается из общей формулы как предел при $t \to \infty$. В итоге оказывается, что найденная формула описывает в параметрической форме все рациональные решения уравнения $x^2 + 3y^2 = 1$ при $t \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$.

4. Легко видеть, что определённое в условии отношение гомотопии на множестве матриц является отношением эквивалентности. Рассмотрим произвольную невырожденную вещественную матрицу $C$ порядка $n$. Мы будем использовать транзитивность отношения гомотопии, преобразуя матрицу за несколько отдельных шагов.

   Предположим, что $\det C > 0$. Разложим определитель матрицы $C$ по первой строке. Хотя бы одно из $n$ возникающих при этом слагаемых положительно; пусть оно расположено в $j$-м столбце. Все остальные слагаемые можно непрерывно привести к нулю, сохраняя их знак — это достигается при домножении соответствующих коэффициентов матрицы на $1 - \lambda$. Оставшийся коэффициент $a_{1j}$ приводится таким же образом к 1 или $-1$ домножением на линейную функцию, равную 1 при $\lambda = 0$ и $1/|a_{1j}|$ при $\lambda = 1$. Далее все матричные коэффициенты $j$-го столбца можно также домножить на $1 - \lambda$. Таким образом, матрица $C$ гомотопна матрице, у которой первая строка и $j$-й столбец удовлетворяют требованием задачи. Далее преобразуем соответствующий минор матрицы по тому же принципу.

   Случай $\det C < 0$ разбирается аналогично.

   Заметим, что можно доказать более сильное утвержение о том, что всякая невырожденная матрица гомотопна либо единичной матрице, либо диагональной матрице, у которой на диагонали расположены числа 1, 1, …, 1, $-1$. Легко видеть также из соображений непрерывности, что матрицы с определителями разного знака не гомотопны.

5. Очевидно, что если объединение является звёздным, то круги пересекаются. Если $O_1 = O_2$, то объединение будет звёздным всегда, и это же верно, если один из кругов содержится в другом. Остаётся рассмотреть случай, когда окружности с центром $O_i$ и радиусом $r_i$, где $i = 1, 2$, пересекаются в двух точках $P$, $Q$. Нетрудно заметить, что для звёздности пересечения необходимо и достаточно, чтобы угол $O_1PO_2$ был по величине не больше прямого. С учётом теоремы косинусов, это приводит к условию $O_1O_2^2 \leq r_1^2 + r_2^2$. Если один из кругов содержится в другом, то $O_1O_2 \leq |r_1 - r_2|$, и это условие выполнено автоматически. Таким образом, необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 \leq r_1^2 + r_2^2.$$

6. Пусть $O$ — одна из точек, которая может служить центром полной окружности. Легко видеть, что $O$ совпадает с одним из $(m-1)(n-1)$ внутренних узлов разбиения прямоугольника на квадраты. Пусть $\xi_O$ — случайная величина, равная 1, если точка $O$ является центром полной окружности и равная 0 в противном случае. Легко видеть, что математическое ожидание $\xi_O$ равно вероятности того, что $\xi_O = 1$. Последняя вероятность составляет $(1/4)^4$, так как для возникновения полной окружности с центром $O$ необходимо и достаточно, чтобы в каждом из четырёх квадратов, имеющих $O$ вершиной, дуга была проведена с центром в точке $O$.

   Пусть $\xi$ — случайная величина, математическое ожидание которой требуется найти. Ясно, что она равна сумме случайных величин $\xi_O$ по всем точкам $O$. Используя тот факт, что матожидание суммы случайных величин равно сумме матожиданий (это верно для любых случайных величин, как независимых, так и зависимых), получаем в ответе $(m-1)(n-1)/256$.

7. Из равенства $x^3+ax^2+bx+c = (x-a)(x-b)(x-c)$ с учётом теоремы Виета имеем систему уравнений

$$\begin{cases} a+b+c = -a \\ ab+ac+bc = b \\ abc = -c\,. \end{cases}$$

   Если $c = 0$, то из второго уравнения $ab = b$, т.е. $b = 0$ или $a = 1$. Тогда из первого уравнения имеем соответственно $a = 0$ или $b = -2$. Это даёт два многочлена $x^3$ и $x^3 + x^2 - 2x$.

   Пусть $c \neq 0$. Тогда $ab = -1$, $c = -(2a+b)$, $(a+b)c = b - ab = b + 1$, что приводит к уравнению $(2a+b)(a+b) + b + 1 = 0$, т.е. $2a^2 + b^2 + b - 2 = 0$. Домножая на $b^2$, с учётом того, что $b \neq 0$, имеем равносильное уравнение $b^4 + b^3 - 2b^2 + 2 = 0$. Это уравнение имеет корень $b = -1$, что приводит к разложению на множители $(b+1)(b^3 - 2b + 2) = 0$. Случай $b = -1$ приводит к $a = 1$, $c = -1$, т.е. к многочлену $x^3 + x^2 - x - 1$.

   Покажем, что кубическое уравнение $b^3-2b+2 = 0$ имеет в точности один вещественный корень $b_0$. Критическими точками будут числа $\pm\sqrt{2/3}$. Легко видеть, что значениями многочлена $b^3 - 2b + 2$ в этих точках будут числа $2 \pm 4\sqrt{2/3}/3 > 0$. Из этого следует, что функция $b^3-2b+2$ возрастает при $b \in (-\infty, -\sqrt{2/3}\,]$, изменяясь от $-\infty$ до некоторого положительного числа, а потому обращается в ноль в некоторой точке $b_0 < -\sqrt{2/3}$. Далее функция убывает при $b \in [-\sqrt{2/3}, \sqrt{2/3}\,]$, принимая только положительные значения и далее возрастает при $b \in [\sqrt{2/3}, \infty)$.

По значению $b = b_0$ однозначно находятся $a = -1/b$ и $c = -(2a+b)$. Это даёт четвёртый многочлен, поскольку $b_0 \neq -2$, $b_0 \neq -1$.

В итоге мы имеем 4 многочлена, удовлетворяющих условию задачи.

8. Положим

$$F(u) = \left( \int\limits_0^u e^{-x^2/2}\, dx \right)^2 = \iint\limits_{0 \le x,y \le u} e^{-(x^2+y^2)/2}\, dx\, dy.$$

Переходя к полярным координатам, оцениваем $F(x)$ сверху двойным интегралом по четверти круга радиусом $u\sqrt{2}$ и снизу — двойным интегралом по четверти круга радиусом $u$. Учитывая тот факт, что якобиан при переходе от декартовых координат к полярным равен $r$, т.е. $dx\, dy = r\, dr\, d\varphi$, вычисляем интеграл

$$\iint\limits_{x^2+y^2 \le R} e^{-(x^2+y^2)/2}\, dx\, dy = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^R re^{-r^2/2}\, dr = \pi(1 - e^{R^2/2})/2,$$

что после извлечения корней приводит к требуемым неравенствам.

9. Очевидно, $x_0 < x_1$. Отсюда $x_1 > x_2$, $x_2 < x_3$ и так далее. Кроме того, $x_2 > a + 1/x_1 > a = x_0$, а потому $x_3 = a + 1/x_2 < a + 1/x_0 = x_1$, $x_4 = a + 1/x_3 > a + 1/x_1 = x_2$ и так далее. Из этих неравенств вытекает, что мы имеем дело с вложенной системой отрезков

$$[x_0, x_1] \supset [x_2, x_3] \supset \cdots \supset [x_{2n}, x_{2n+1}] \supset \cdots .$$

Проверим, что длины рассматриваемых отрезков стремятся к нулю, откуда будет следовать, что пересечение этих отрезков — множество, состоящее из одной точки $\alpha$, причём $\alpha = \lim_{n\to\infty} x_n$.

Для начала заметим, что $x_0 = a \ge 1$, $x_n \ge x_2 = q > 1$ при $n \ge 1$. Поэтому при всех $n \ge 0$ имеем

$$|\, x_{n+2} - x_{n+1}| = \left| \frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} \right| = \frac{|\, x_{n+1} - x_n|}{x_n x_{n+1}} \le \frac{|x_{n+1} - x_n|}{q}\,.$$

Следовательно,

$$|\, x_{n+1} - x_n| \le \frac{|\, x_1 - x_0|}{q^n} = \frac{1}{aq^n}$$

при всех $n \geq 0$, откуда прямо вытекает, что отрезки образуют стягивающуюся последовательность.

Итак, предел $\lim_{n\to\infty} = \alpha$ существует при любом $a \in \mathbb{N}$. Очевидно, что $\alpha > a > 0$. Переходя к пределу при $n \to \infty$ в равенстве $x_{n+1} = a + 1/x_n$, имеем $\alpha = a + 1/\alpha$, что приводит к квадратному уравнению $\alpha^2 - a\alpha - 1 = 0$. Это уравнение имеет два корня разных знаков; нас интересует положительный корень. Таким образом,

$$\alpha = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4}}{2}\,.$$

10. Рассмотрим отрезок $[c^2, (c+1)^2]$, где $c > 0$. Полагая $q_1(x) = c^2$, $q_2(x) = x$, применим теорему Штурма при $c^2 \leq x \leq (c+1)^2$. Функция $y_1(x) = \sin(cx + x_0)$ будет решением уравнения $y'' + c^2 y = 0$ при любом $x_0 \in \mathbb{R}$. Последнее число можно подобрать так, чтобы в точке $c^2$ функция $y_1$ обращалась в ноль. Поскольку длина рассматриваемого отрезка равна $(c+1)^2 - c^2 = 2c + 1$, точки вида $c^2 + \pi k/c$ будут принадлежать отрезку $[c^2, (c+1)^2]$ при условии $0 \leq \pi k/c \leq 2c + 1$. Во всех этих точках функция $y_1(x)$ обращается в ноль.

    Положим $\nu(c) = \lfloor c(2c+1)/\pi \rfloor$, где через $\lfloor x \rfloor$ мы обозначили целую часть числа $x$. Таким образом, функция $y_1(x)$ обратится в ноль на отрезке $[c^2, (c+1)^2]$ по крайней мере в $\nu(c) + 1$ точках. Поскольку между любыми двумя нулями функции $y_1(x)$ имеется нуль функции $y_2(x)$, являющейся решением основного уравнения $y'' + xy = 0$, то на отрезке $[c^2, (c+1)^2]$ имеется как минимум $\nu(c)$ нулей функции $y_2(x)$. В силу иррациональности числа $\pi$, это же самое верно и для отрезка $[c^2, (c+1)^2 - \varepsilon]$ при достаточно малом $\varepsilon$.

    Простой подсчёт показывает, что $\nu(2) = \lfloor 10/\pi \rfloor = 3$, $\nu(3) = \lfloor 21/\pi \rfloor = 6$, $\nu(4) = \lfloor 36/\pi \rfloor = 11$. Отрезки $[4, 9 - \varepsilon]$, $[9, 16 - \varepsilon]$, $[16, 25]$ не пересекаются и содержатся в отрезке $[0, 25]$. Отсюда следует, что на отрезке $[0, 25]$ любое решение уравнения $y'' + xy = 0$ обращается в ноль по крайней мере в $\nu(2) + \nu(3) + \nu(4) = 3 + 6 + 1 = 20$ точках.